תורת הקבוצות, תרגיל 7

1. א. הוכח, כי לכל שתי קבוצות A,B מתקיים $|A|+|B|=|A\cup B|+|A\cap B|$.
ב. נסח עקרון דומה עבור שלוש קבוצות.
[רמז: היעזר ב"עקרון ההכלה-הדחה בקומבינטוריקה].

2. יהיו a,b,c עוצמות. נאמר ש- a בולעת את b אם $a+b=a$.
א. הוכח כי אם a בולעת את b ומתקיים $c<b$ אז a בולעת גם את c.
ב. הוכח, כי אם a בולעת את 1 אז a בולעת גם את $\aleph_0$.

3. יהיו a,b עוצמות. הוכח, כי שלושת התנאים הבאים שקולים:
א. a בולעת את b.
ב. $\aleph_0 b\leq a$.
ג. a בולעת את $\aleph_0 b$.
[רמז להוכחת ב' בהינתן א': יהיו A,B זרות כך, ש $|A|=a,|B|=b$. לפי א', תהי $f:A\cup B\to A$ חח"ע ועל. נתבונן בסדרת הקבוצות הבאה המוגדרת ברקורסיה: $B_0=B,B_{n+1}=f[B_n]$. הראה, כי קבוצות אלו הן זרות והתבונן באיחודן.]

4. עבור קבוצה A, נגדיר את $S_A:=\{f|f:A\to A\}$ כך, ש f חח"ע ועל. נקרא לה "קבוצת התמורות של איברי A".
א. הוכח, כי אם A קבוצה סופית בת n איברים אז $|S_A|=n!$.
ב. הוכח, כי אם $|A|=|B|$ אז $|S_A|=|S_B|$.
בהתבסס על סעיפים א' ו- ב', נוכל להגדיר עבור עוצמה a את $a!$ בצורה הבאה: תהי A קבוצה כך ש $|A|=a$, נסמן את $|S_A|$ ב- $a!$.
ג. הוכח, כי הפעולה מוגדרת היטב.
ד. חשב את $\aleph_0!$.

5. הוכח, כי קבוצת כל הסדרות של מספרים ממשיים בהן יש לפחות איבר טרנסצנדנטי אחד שקולה לקבוצת כל הסדרות של מספרים ממשיים.
[תזכורת: מספר טרנסצנדנטי הוא מספר ממשי שאיננו אלגברי].

תאריך ההגשה: 8.12.2004